

Thm : T.V.I

Rappel : f continue sur $[a, b]$
si $f(a) \times f(b) \leq 0$

alors : $\exists c \in [a, b]; f(c) = 0$

Ex: 1] Montrer que l'équation:
 $2x^3 - 5x^2 - 3 = 0$
admet au moins une solution
dans l'intervalle : $[\frac{5}{2}, 3]$

Ex: 2] $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}; I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

- 1°/ calculer : $J = f(I)$
- 2°/ Mq : f réalise une bijection f^{-1} de I sur J (c-à-d : admet une fct réciproque)
- 3°/ calculer l'expression de f^{-1}
- 4°/ Mq f^{-1} est continue et strictement monotone sur J .
- 5°/ Mq l'équation : $f(x) = x^2$ admet une solution dans $[-1; 0]$.
(→ Indication : considérer : $g(x) = f(x) - x^2$)

Dérivabilité :

Ex: 3] $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

- 1°/ Mq : $f'(2) = 10$
- 2°/ Donner l'équation de la tangente (T) au pt $A(2, f(2))$.

Ex: 4] $f(x) = x|x-1|; x \in \mathbb{R}$

- 1°/ Calculer : $f'_d(1)$ et $f'_g(1)$.
- 2°/ En déduire que f n'est pas dérivable au pt : $x_0 = 1$
- 3°/ Donner une interprétation géométrique du résultat.

4°/ Donner les équations des demi-tangentes au pt : $A(1, f(1))$

Ex: 5] Calculer $f'(x); x \in I$ dans chaque cas :

- 1°/ $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 5x + \frac{2}{3}; I =]0; +\infty[$
- 2°/ $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}; I =]0; +\infty[$
- 3°/ $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-4}; I =]2; +\infty[$
- 4°/ $f(x) = 1 - 2x + \frac{3}{5x-10}; I =]-\infty; 2[$

Ex: 6] $f(x) = x + 3\sqrt{x^2 - 1}$

- 1°/ Calculer D_f
- 2°/ Donner le domaine de déf de f' .
- 3°/ Déterminer f' .
- 4°/ vérifier que : $f''(x) = \frac{-3}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

Ex: 7] Etudier la variation de f :

- 1°/ $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$
- 2°/ $f(x) = 5x + 1 + \frac{1}{x}$
- 3°/ $f(x) = x - 2\sqrt{x}$
- 4°/ $f(x) = \frac{2x-3}{x-5}$

Ex: 8] : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Mq (\mathcal{C}_f) admet un pt d'inflexion A. et déterminer ses coordonnées.

Ex: 9] $f(x) = \sqrt{x+2}$

- 1°/ Calculer D_f et $D_{f'}$.
- 2°/ Mq f n'est pas dérivable à droite du pt : $x_0 = -2$ et donner une interprétation géométrique.

⑤

Ex 1: on pose: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$

f est une fct cont sur $[\frac{5}{2}; 3]$

$$\text{on a: } f\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \times \frac{5^3}{2^3} - 5 \times \frac{5^2}{2^2} - 3$$

$$= \frac{5^3}{2^2} - \frac{5^3}{2^2} - 3 = -3 < 0$$

$$f(3) = 2 \times 3^3 - 5 \times 3^2 - 3 = 2 \times 27 - 45 - 3$$

$$= 54 - 48 > 0 \text{ donc: } \boxed{f\left(\frac{5}{2}\right) \times f(3) \leq 0}$$

et d'après le thm des valeurs intermédiaires:

$$\exists c \in \left[\frac{5}{2}; 3\right] / f(c) = 0$$

$$\text{c-à-d l'éq } 2x^3 - 5x^2 - 3 = 0 \text{ admet}$$

au moins une solution dans $[\frac{5}{2}; 3]$.

Ex 2: $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}; I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

1°) f est continue sur $D_f =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$

donc en particulier sur $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$$\text{ainsi: } J = f(I) = f\left(]-\frac{1}{2}; +\infty[\right)$$

$$f \text{ est } \searrow \text{ car: } f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{(2x+1)^2} < 0$$

$$\text{donc: } J =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f; \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f[$$

$$\text{on a: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f = \frac{3/2}{0^+} = +\infty \text{ donc:}$$

$$\boxed{J =]\frac{1}{2}; +\infty[}$$

2°) f est continue et strictement \searrow :
déjà prouver dans 1°)

donc: f admet une fct réciproque

3°) Calcul de f^{-1} .

$$\text{on utilise l'éq: } y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$$

soit $x \in J$ on cherche $y \in I$ tq:

$$y = f^{-1}(x) \text{ c'est-à-dire } y \text{ a:}$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow \frac{y+1}{2y+1} = x$$

$$\Leftrightarrow y(1-2x) = x-1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x-1}{1-2x}$$

$$\text{donc: } (\forall x \in J); f^{-1}(x) = \frac{x-1}{1-2x}$$

4°) f^{-1} est continue par définition
 f et f^{-1} ont la même monotonie donc
 f^{-1} est strictement \searrow sur J .

5°) on pose: $g(x) = f(x) - x^2$

* g est continue sur $[-1; 0]$

$$g(-1) = f(-1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$g(0) = f(0) - 0 = 1 > 0$$

$$\text{donc: } g(-1) \times g(0) \leq 0$$

\Rightarrow d'après T.V.I, l'éq $g(x) = 0$
c-à-d $f(x) = x^2$ admet au moins une
solution dans $[-1; 0]$.

Ex 3: $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

1°) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2} = \frac{0}{0}$ (F.I)

on fait une
division:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2x - 8 \\ -3x^2 + 6x \\ \hline 4x - 8 \\ -4x + 8 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-2 \\ 3x+4 \end{array}$$

$$\text{donc: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x+4)}{1} = 6 + 4 = \boxed{10}$$

2°) (T): $y = p'(2)(x-2) + f(2)$

$$y = 10(x-2) + 9$$

$$\Rightarrow \text{(T): } y = 10x - 11$$

L'éq de la tg à la courbe (\mathcal{C}_f)
au pt: $A(2; 9)$

①

Ex: 4] déjà traité

Ex: 5] " "

Ex: 6] " "

Ex: 7] " "

Ex: 8] $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 6x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

donc: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	1
$f''(x)$	- +

f'' s'annule en $x_0 = 1$ en changeant de signe donc le pt $(1, f(1))$ est un pt d'inflexion ; avec: $f(1) = 2$

Ex: 9] $f(x) = \sqrt{x+2}$

1°) soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D_f$ si $x+2 \geq 0$

donc: $D_f = [-2, +\infty[$

et $x \in D_f$ si $x+2 \geq 0$ donc:

$D_f = [-2, +\infty[$

2°) on a: $\frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \frac{\sqrt{x+2}}{x+2}$
pour tout $x > -2$.

et $\frac{\sqrt{x+2}}{x+2} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}^2} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

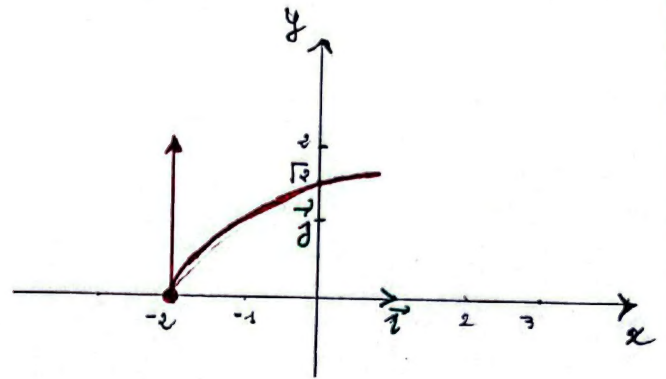
donc: $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

la limite est infinie ; donc f n'est pas dérivable à droite du pt $x_0 = -2$.

Interprétation géo: (E_f) admet une demi-tg dirigée par \vec{j} à

②

droite du point d'abscisse $x_0 = -2$



Complément : Interprétation de la non dérivabilité :

si $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$

(E_f) admet une demi-tangente dirigée par $\pm \vec{j}$ au pt x_0^\pm selon le cas suivante :

Situation:	dirigée par:	dessin
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(\frac{\dots}{\dots} \right) = +\infty$	$+\vec{j}$	
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(\frac{\dots}{\dots} \right) = -\infty$	$-\vec{j}$	
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{\dots}{\dots} \right) = +\infty$	$-\vec{j}$	
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{\dots}{\dots} \right) = -\infty$	$+\vec{j}$	

↳ tableau de signe

→ par exemple :

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \frac{+}{-} = -\infty$

"deux signes \neq "

donc dirigée par $-\vec{j}$

$(-)(+) = -$
la dem-tg est